На правах рукописи

УДК 517.095

МАРТЕМЬЯНОВА Нина Викторовна

НЕЛОКАЛЬНЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ЭЛЛИПТИКО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

01.01.02 – дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Казань – 2012

Работа выполнена на кафедре математики
и методики обучения ФГБОУ ВПО "Поволжская государственная социально-гуманитарная академия"
и в отделе физико-математических и технических наук
ГАНУ "Институт прикладных исследований АН РБ"

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, чл.-корр. АН РБ, профессор **Сабитов Камиль Басирович**
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор **Хайруллин Равиль Сагитович**
	доктор физико-математических наук, профессор **Пулькина Людмила Степановна**
Ведущая организация:	ФГАОУ ВПО "Белгородский государственный национальный исследовательский университет"

Защита состоится 16 февраля 2012 г. в 16 часов 00 минут на заседании диссертационного совета Д 212.081.10 при Казанском (Приволжском) федеральном университете по адресу: 420008 Казань, ул. проф. Нужина, д.1/37, ауд. 337.

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке им. Н.И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета по адресу: 420008, г. Казань, ул. Кремлевская, 18.

Автореферат разослан «   » января 2012 г. и размещен на официальном сайте Казанского (Приволжского) федерального университета: www.ksu.ru

Ученый секретарь совета Д 212.081.10
к.ф.-м.н., доцент   Липачев Е.К.

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Исследование краевых задач для уравнений смешанного типа является одним из важных разделов современной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Интерес к этому типу уравнений объясняется как теоретической значимостью получаемых результатов, так и их важными практическими приложениями в газовой динамике, теории околозвуковых течений, в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей и других областях науки.

Начало исследований краевых задач для уравнений смешанного типа было положено в работах Ф. Трикоми и С. Геллерстедта.

Началом нового этапа в развитии теории уравнений смешанного типа явились работы Ф.И. Франкля, в которых он обнаружил важные приложения теории уравнений смешанного типа к проблемам трансзвуковой газовой динамики.

Дальнейшим развитием теории краевых задач для уравнений смешанного типа занимались Ф.И. Франкль, А.В. Бицадзе, К.И. Бабенко, C.S. Morawetz, M.N. Protter, Л. Берс, В.Ф. Волкодавов, В.Н. Врагов, Т.Д. Джураев, В.И. Жегалов, А.Н. Зарубин, Т.Ш. Кальменов, Н.Ю. Капустин, И.Л. Кароль, Ю.М. Крикунов, А.Г. Кузьмин, О.А. Ладыженская, Е.И. Моисеев, А.М. Нахушев, Н.Б. Плещинский, С.П. Пулькин, О.А. Репин, К.Б. Сабитов, М.С. Салахитдинов, М.М. Смирнов, А.П. Солдатов, Р.С. Хайруллин и другие. В работах этих авторов помимо задач Трикоми и Геллерстедта поставлены и исследованы новые краевые задачи для уравнений смешанного типа.

Современные проблемы естествознания приводят к необходимости постановки и исследования качественно новых задач, одним из примеров которых являются нелокальные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных. Это связано с тем, что математическими моделями различных физических, химических и биологических процессов часто являются задачи, в которых вместо классических краевых условий задается определенная связь значений искомой функции или её производных на границе области.

Нелокальные задачи для дифференциальных уравнений рассматривались в работах Ф.И. Франкля, А.В. Бицадзе, В.И. Жегалова, J.R. Cannon, Л.И. Камынина, А.В. Бицадзе и А.А Самарского, А.М. Нахушева, А.П. Солдатова, В.А. Ильина, Н.И. Ионкина, Е.И. Моисеева, А.Л. Скубачевского, М.Е. Лернера и О.А. Репина, Л.С. Пулькиной, А.И. Кожанова, К.Б. Сабитова и других.

Обратные задачи возникают во многих разделах науки: квантовой теории рассеяния, электродинамике, акустике, геофизике (обратные задачи электроразведки, сейсмики, теории потенциала), астрономии и других областях естествознания. Это связано с тем, что значения параметров модели должны быть получены из наблюдаемых данных, а именно свойства среды на практике часто бывают неизвестны.

Степень разработанности проблемы. В трансзвуковой газовой динамике Ф.И. Франкль впервые для уравнения Чаплыгина $K(y)u_{xx} + u_{yy} = 0$, где $K(0) = 0$, $K'(y) > 0$, поставил краевую задачу, в которой носителем нелокального краевого условия $u(0, y) - u(0, -y) = f(y)$, $0 < y < a$, является часть границы $x = 0$ области, состоящей из частей границ подобластей эллиптичности и гиперболичности уравнения. А.В. Бицадзе доказал существование и единственность решения задачи Франкля для уравнения Лаврентьева

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (sgny)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \tag{1}$$

а также единственность решения этой задачи для уравнения Чаплыгина.

В.И. Жегалов рассмотрел в области, ограниченной при $y > 0$ простой кривой Жордана Γ с концами в точках $A(0, 0)$ и $B(1, 0)$, а при $y < 0$ – характеристиками $x + y = 0$ и $x - y = 1$ уравнения (1), задачу о нахождении решения $u(x, y)$ уравнения (1), удовлетворяющего условиям

$$u = \varphi(x, y),\ (x, y) \in \Gamma,\ a(x)u(x, -x)+b(x)u(x+\frac{1}{2}, x-\frac{1}{2}) = c(x),\ 0 \le x \le \frac{1}{2},$$

кроме того на отрезке задаются обобщенные условия склеивания. Им доказано существование и единственность решения данной задачи.

В работе А.В. Бицадзе и А.А. Самарского изучена задача о нахождении в прямоугольнике $\{(x, y)| - l < x < l, 0 < y < 1\}$ гармонической функции $u(x, y)$, удовлетворяющей условиям $u(x, 0) = \varphi_1(x)$, $u(x, 1) = \varphi_2(x)$, $-l \le x \le l$, $u(-l, y) = \varphi_3(y)$, $u(0, y) = u(l, y)$, $0 \le y \le 1$. Единственность решения доказывается на основании принципа экстремума. Существование решения вытекает из разрешимости интегрального уравнения, эквивалентного поставленной задаче.

Исследованию нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка гиперболического и смешанного типов посвящено большое количество работ А.М. Нахушева.

Н.И. Ионкин рассмотрел в прямоугольнике $\{(x, t)|0 < x < 1, 0 < t < T\}$ задачу для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + F(x, t)$$

об отыскании его решения $v(x,t)$, удовлетворяющего нелокальному интегральному условию

$$\int_0^1 v(x,t)dx = \mu(t),\ 0 \le t \le T, \tag{2}$$

а также граничному и начальному условиям: $v(0,t) = \nu(t),\ 0 \le t \le T,\ \ v(x,0) = v_0(x),\ \ 0 \le x \le 1$. Им получены априорные оценки для решения задачи по начальной функции и правой части в нормах L_2 и C. Идея доказательства существования решения основывается на возможности разложения начальной функции в биортогональный ряд по системе корневых функций несамосопряженной одномерной задачи на собственные значения.

Краевые задачи с нелокальными интегральными условиями для отдельных типов дифференциальных уравнений изучены в работах А.И. Кожанова и Л.С. Пулькиной.

М.Е. Лернер, О.А. Репин в полуполосе $G = \{(x,y)|0 < x < 1, y > 0\}$ исследовали задачу, в которой требуется найти функцию $u(x,y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x,y) \in C(\overline{G}) \cap C^1(G \cup \{x=0\}) \cap C^2(G);$$

$$y^m u_{xx} + u_{yy} = 0,\ \ (x,y) \in G,\ \ m > -1;$$

$$u(x,y) \to 0 \text{ при } y \to +\infty \text{ равномерно по } x \in [0,1];$$

$$u(0,y) - u(1,y) = \varphi_1(y),\ u_x(0,y) = \varphi_2(y),\ y \ge 0;\ u(x,0) = \tau(x),\ 0 \le x \le 1,$$

где $\tau(x)$, $\varphi_1(y)$, $\varphi_2(y)$ – заданные достаточно гладкие функции, причем $\tau(x)$ ортогональна к системе функций 1, $\cos(2n+1)\pi x,\ n = 0,1,2,\dots$.

Е.И. Моисеев исследовал нелокальную задачу в полуполосе G для вырождающегося на границе эллиптического уравнения:

$$y^m u_{xx} + u_{yy} = 0,\ \ m > -2;$$

$$u(0,y) = u(1,y),\ u_x(0,y) = 0,\ y \ge 0,\ \ u(x,0) = f(x),\ 0 \le x \le 1,$$

в классе функций $u \in C(\overline{G}) \cap C^2(G)$ в предположении, что $u(x,y)$ ограничена или стремится к нулю на бесконечности. Решение задачи построено в виде суммы биортогонального ряда. Единственность и существование решения доказаны методом спектрального анализа.

К.Б. Сабитов рассмотрел задачу Дирихле для уравнения смешанного типа

$$Lu \equiv signt \cdot |t|^m u_{xx} + u_{tt} - b^2 signt \cdot |t|^m u = 0, \tag{3}$$

где $m = const > 0$, $b = const \geq 0$, в прямоугольной области $D = \{(x,t)|0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$, α, β – заданные положительные числа, со следующими условиями:

$$u \in C(\overline{D}) \cap C^1(D) \cap C^2(D_- \cup D_+); \quad Lu(x,t) = 0, (x,t) \in D_- \cup D_+;$$

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \ -\alpha \leq t \leq \beta;$$

$$u(x,\beta) = f(x), \ u(x,-\alpha) = g(x), \ 0 \leq x \leq 1,$$

здесь f и g– заданные достаточно гладкие функции, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$. Установлен критерий единственности. Существование решения поставленной задачи доказано на основе спектрального метода решения краевых задач.

К.Б. Сабитовым и О.Г. Сидоренко для уравнения (3) в прямоугольной области D найдены необходимые и достаточные условия единственности и достаточные условия разрешимости краевой задачи с условиями периодичности $u(0,t) = u(1,t)$, $u_x(0,t) = u_x(1,t)$, $-\alpha \leq t \leq \beta$, и локальными условиями $u(x,\beta) = \varphi(x)$, $u(x,-\alpha) = \psi(x)$, $0 \leq x \leq 1$.

Сабитовым К.Б. изучена краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа с нелокальным интегральным условием (2) и доказаны теоремы единственности, существования и устойчивости решения.

В работах Ю.К. Сабитовой изучены задачи для уравнения (3) в прямоугольной области D с нелокальными условиями: $u(0,t) = u(1,t)$ или $u_x(0,t) = u_x(1,t)$, $-\alpha \leq t \leq \beta$, в сочетании с другими локальными граничными данными. Доказаны соответствующие теоремы единственности и существования решения поставленных задач.

Различные обратные задачи для отдельных типов дифференциальных уравнений в частных производных изучались во многих работах. Отметим здесь прежде всего работы Тихонова А.Н., Лаврентьева М.М., Романова В.Г., Иванова В.К., Васина В.В., Танана В.П., Прилепко А.И., Денисова А.М., Алексеева А.С., Бубнова Б.А., Баева А.В., Кожанова А.И. и другие.

Сабитовым К.Б. и Сафиным Э.М. изучены краевые задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа

$$Lu = \begin{cases} u_t - u_{xx} + b^2 u = f_1(x), & y > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} + b^2 u = f_2(x), & y < 0, \end{cases} \tag{4}$$

в прямоугольной области D, где неизвестными являются функции $u(x,y)$ и $f_i(x)$, $i = 1,2$. Установлены критерии единственности, доказаны теоремы существования и устойчивости решений рассматриваемых задач.

Такие задачи относятся к классу обратных задач с неизвестным источником.

В отличие от этих исследований в данной работе рассматриваются нелокальные обратные задачи для уравнений эллиптико-гиперболического типа. Отличительной особенностью нелокальных задач для данного класса уравнений смешанного типа уравнений является то, что система собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи не полна. В связи с этим при решении таких задач спектральным методом необходимо рассматривать присоединенные функции. Это усложняет построение решения и доказательство корректности задачи. Решения задач строятся в виде сумм биортогональных рядов. При этом возникают малые знаменатели, затрудняющие сходимость этих рядов. А в связи с тем, что рассматриваемое уравнение есть уравнение эллиптико-гиперболического типа, для доказательства сходимости построенных рядов требуется установить более сильные оценки, чем в случае уравнения (4).

Цель и задачи диссертационного исследования. В настоящей работе рассматриваются обратные задачи для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа

$$Lu \equiv u_{xx} + sgny \cdot u_{yy} - b^2 u = f(x,y) = \begin{cases} f_1(x), & y > 0, \\ f_2(x), & y < 0, \end{cases} \qquad (5)$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y) |\ 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $b \geq 0$, со следующим нелокальным условием:

$$u(0,y) = u(1,y) \ \text{ или } \ u_x(0,y) = u_x(1,y), \ \ -\alpha \leq y \leq \beta,$$

в сочетании с другими локальными граничными данными. Основными задачами исследования являются постановка и доказательство единственности, существования и устойчивости решений нелокальных обратных задач для уравнения (5) в области D.

Объектом исследования являются нелокальные обратные задачи для уравнений смешанного типа с оператором Лаврентьева-Бицадзе.

Теоретическую и методологическую основу исследования вопросов единственности, существования и устойчивости решений нелокальных обратных задач для уравнений смешанного эллиптико-гиперболического типа составляют методы общей теории дифференциальных уравнений в частных производных и спектрального анализа.

Научная новизна исследования. Результаты работы, выносимые на защиту являются новыми.

Основные результаты диссертационной работы, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты.

1. Доказательство единственности, существования и устойчивости решения краевых задач для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с неизвестной одинаковой правой частью, зависящей от одной переменной, в прямоугольной области с нелокальными граничными условиями первого и второго родов. Для каждой из поставленных задач установлен критерий единственности, решение построено в виде сумм биортогональных рядов с обоснованием сходимости в соответствующем классе функций, доказана устойчивость решения по граничным данным.

2. Доказательство единственности, существования и устойчивости решения краевых задач для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с неизвестными разными правыми частями, каждая из которых зависит от одной переменной, в прямоугольной области с нелокальными граничными условиями первого и второго родов. Для каждой из поставленных задач установлен критерий единственности, решение построено в виде сумм биортогональных рядов с обоснованием сходимости в соответствующем классе функций, доказана устойчивость решения по граничным данным.

Теоретическая и практическая значимость исследования. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты и методы исследования представляют научный интерес и могут быть использованы для дальнейшей разработки теории обратных краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных смешанного типа.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертационной работы докладывались автором и обсуждались на научных семинарах: по теории дифференциальных уравнений имени С.П. Пулькина при Поволжской государственной социально-гуманитарной академии и Институте прикладных исследований АН РБ (научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор К.Б. Сабитов, 2009 – 2011 гг.), кафедры уравнений математической физики Самарского государственного университета (научный руководитель – д.ф.-м.н.,профессор Л.С. Пулькина, 2010 – 2011 гг.), кафедры дифференциальных уравнений Казанского федерального университета (научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор В.И. Жегалов, 2011 г.) и НИУ БелГУ (научный руководитель – д.ф.-м.н., профессор А.П. Солдатов, 2011 г.), а также на следующих всероссийских и международных конференциях: **1.** Международная конференция "Современные проблемы математики, механики и их приложений", посвященная 70-летию ректора МГУ академика В.А. Садовничего (г. Москва, 30 марта – 2 апреля 2009 г.). **2.** Международная школа-конференция для студентов, аспирантов и молодых ученых "Фундаментальная математика и её приложения в естествознании", посвященная 100-летию БашГУ (г. Уфа, 2 – 6 октября 2009 г.). **3.** Вторая всероссийская научно-практическая конференция "Интегративный характер современного математического образования", посвященная памяти заслуженного деятеля науки РФ, члена-корреспондента РАЕ, доктора физико-математических наук, профессора В.Ф. Волкодавова (г. Самара, 26 – 28 октября 2009 г.). **4.** Седьмая Всероссийская научная конференция с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи"(г. Самара, 3 – 6 июня 2010 г.). **5.** Вторая Международная конференция "Математическая физика и ее приложения"(г. Самара, 29 августа – 4 сентября 2010 г.). **6.** Девятая молодежная научная школа-конференция "Лобачевские чтения - 2010"(г. Казань, 1 – 6 октября 2010 г.). **7.** Международная конференция "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвященная 110-ой годовщине со дня рождения выдающегося математика И.Г. Петровского (г. Москва, 30 мая – 4 июня 2011 г.). **8.** Всероссийская конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения"(г. Самара, 26 – 30 июня 2011 г.). **9.** Всероссийскя конференция с международным участием "Дифференциальные уравнения и их приложения"(г. Стерлитамак, 27 – 30 июня 2011 г.). **10.** Международная конференция "Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел"(г. Белгород, 17 – 21 октября 2011 г.). **11.** Десятая молодежная научная школа-конференция "Лобачевские чтения - 2011"(г. Казань, 31 октября – 4 ноября 2011 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1] – [16] общим объемом 4,43 п.л. При этом статьи [1], [2] опубликованы в изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией (ВАК) Министерства образования и науки Российской Федерации для публикации результатов научных исследований.

Вклад автора в разработку избранных проблем. Диссертация является самостоятельным исследованием автора. В совместной работе [2] постановка задач и идея доказательств принадлежит научному руководителю К.Б. Сабитову.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, двух глав и списка литературы, содержащего 107 наименований. Общий объём диссертации – 108 страниц.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность научному руководителю К.Б. Сабитову за предложенную тематику исследований, ценные советы, постоянное внимание к работе и поддержку.

Краткое содержание диссертации

Во **введении** даётся обзор литературы, формулируются постановки задач, приводятся основные результаты диссертации, а также кратко описывается содержание параграфов.

В **главе 1** исследуются обратные задачи для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа, связанные с поиском одинаковых правых частей. Методом спектрального анализа установлены критерии единственности и доказаны теоремы существования и устойчивости решений задач.

Рассмотрим уравнение эллиптико-гиперболического типа (5) при $f_1(x) = f_2(x) = f(x)$, то есть уравнение

$$Lu \equiv u_{xx} + sgny \cdot u_{yy} - b^2 u = f(x), \tag{6}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,y)|\ 0 < x < 1, -\alpha < y < \beta\}$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $b \geq 0$ – заданные действительные числа. Для уравнения (6) в этой области поставлены и решены следующие обратные задачи.

Задача 1.1. *Найти в области D функции $u(x,y)$ и $f(x)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+);\ f(x) \in C(0,1) \cap L[0,1]; \tag{7}$$

$$Lu = f(x), (x,y) \in D_- \cup D_+; \tag{8}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x),\ u(x,-\alpha) = \psi(x),\ u_y(x,-\alpha) = g(x),\ 0 \leq x \leq 1, \tag{9}$$

$$u(0,y) = u(1,y),\ u_x(0,y) = 0,\ -\alpha \leq y \leq \beta; \tag{10}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, $D_+ = D \cap \{y > 0\}$, $D_- = D \cap \{y < 0\}$.

Задача 1.2. *Найти в области D функции $u(x,y)$ и $f(x)$, удовлетворяющие условиям (7) – (9) и*

$$u_x(0,y) = u_x(1,y),\ u(1,y) = 0,\ -\alpha \leq y \leq \beta, \tag{11}$$

здесь $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x)$ – заданные достаточно гладкие функции.

Отметим, что в задачах 1.1 и 1.2 условие $u_y(x,-\alpha) = g(x)$, $0 \leq x \leq 1$ является условием переопределения, так как при $f(x) \equiv 0$ это граничное условие, как показано в работах Ю.К. Сабитовой, излишне.

При решении задач 1.1 и 1.2 применяются системы корневых функций одномерной спектральной задачи для уравнения

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \;\; 0 < x < 1,$$

с соответствующими граничными условиями

$$X(0) = X(1), \;\; X'(0) = 0 \quad \text{и} \quad X'(0) = X'(1), \;\; X'(1) = 0:$$

$$1, \;\; \{\cos 2\pi kx\}_{k=1}^{\infty}, \;\; \{x \sin 2\pi kx\}_{k=1}^{\infty}; \tag{12}$$

$$2(1-x), \;\; \{4(1-x)\cos 2\pi kx\}_{k=1}^{\infty}, \;\; \{4\sin 2\pi kx\}_{k=1}^{\infty}. \tag{13}$$

Они составляют биортонормированную систему, полны и образуют базис в пространстве $L_2(0,1)$.

Решение задачи 1.1 построено в виде сумм рядов по системе функций (12):

$$u(x,y) = T_0(y) + \sum_{k=1}^{\infty} T_{2k-1}(y)\cos 2\pi kx + \sum_{k=1}^{\infty} T_{2k}(y) x \sin 2\pi kx, \tag{14}$$

$$f(x) = f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k-1}\cos 2\pi kx + \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k} x \sin 2\pi kx, \tag{15}$$

а коэффициенты рядов (14) и (15) определяются по системе функций (13):

$$T_0(y) = 2\int_0^1 u(x,y)(1-x)dx, \;\; T_{2k}(y) = 4\int_0^1 u(x,y)\sin 2\pi kx dx,$$

$$T_{2k-1}(y) = 4\int_0^1 u(x,y)(1-x)\cos 2\pi kx dx, \;\; f_0 = 2\int_0^1 f(x)(1-x)dx,$$

$$f_{2k} = 4\int_0^1 f(x)\sin 2\pi kx dx, \;\; f_{2k-1} = 4\int_0^1 f(x)(1-x)\cos 2\pi kx dx$$

и находятся единственным образом при выполнении при всех $k \in \mathbb{N}$ (в случае $b = 0$) и $k \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ (в случае $b > 0$) условий:

$$\Delta_{\alpha\beta 0}(0) = \Delta_{\alpha\beta b}(k)|_{b=0,k=0} = -\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 \neq 0, \tag{16}$$

$$\Delta_{\alpha\beta b}(k) = \sin\lambda_k\alpha \operatorname{sh}\lambda_k\beta - \cos\lambda_k\alpha \operatorname{ch}\lambda_k\beta + 1 \neq 0, \tag{17}$$

где $\lambda_k = \sqrt{(2\pi k)^2 + b^2}$.

При $\alpha = (\sqrt{2}-1)\beta$ выражение $\Delta_{\alpha\beta 0}(0) = 0$ и тогда однородная задача (7) – (10), где $\varphi(x) = \psi(x) = g(x) \equiv 0$, имеет ненулевое решение

$$u_0(x,y) = u_0(y) = \begin{cases} f_0\frac{y^2}{2} - \frac{f_0}{2}\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}y + \frac{f_0\alpha\beta(\alpha-\beta)}{2(\alpha+\beta)}, & y > 0, \\ -f_0\frac{y^2}{2} - \frac{f_0}{2}\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha+\beta}y + \frac{f_0\alpha\beta(\alpha-\beta)}{2(\alpha+\beta)}, & y < 0, \end{cases}$$

$$f_0(x) = f_0 = const \neq 0.$$

Если при некоторых α, β, b и $k = p \in \mathbb{N}(\mathbb{N}_0)$ нарушены условия (17), то задача 1.1, где $\varphi(x) = \psi(x) = g(x) \equiv 0$, имеет ненулевое решение

$$u_p(x,y) = u_p(y)\cos 2\pi px, \quad f_p(x) = f_p \cos 2\pi px, \tag{18}$$

$$u_p(y) = \begin{cases} \lambda_p^{-2} f_p \left(\frac{\cos\lambda_p\alpha \operatorname{sh}\lambda_p y + \sin\lambda_p\alpha \operatorname{ch}\lambda_p y - \operatorname{sh}\lambda_p(y-\beta)}{\cos\lambda_p\alpha \operatorname{sh}\lambda_p\beta + \sin\lambda_p\alpha \operatorname{ch}\lambda_p\beta} - 1 \right), & y > 0, \\ \lambda_p^{-2} f_p \left(\frac{\sin\lambda_p(\alpha+y) + \cos\lambda_p y \operatorname{sh}\lambda_p\beta - \sin\lambda_p y \operatorname{ch}\lambda_p\beta}{\cos\lambda_p\alpha \operatorname{sh}\lambda_p\beta + \sin\lambda_p\alpha \operatorname{ch}\lambda_p\beta} - 1 \right), & y < 0, \end{cases}$$

$f_p \neq 0$ – произвольная постоянная.

Условия (17) нарушаются только в том случае, когда

$$\alpha = \frac{1}{\lambda_p}\arcsin\left(\frac{\operatorname{ch}\lambda_p\beta}{\sqrt{\operatorname{ch}2\lambda_p\beta}}\right) - \frac{(-1)^n}{\lambda_p}\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{\operatorname{ch}2\lambda_p\beta}}\right) + \frac{n}{2p}, \ n = 0, 1, \ldots .$$

Теорема 1.1. *Если существует решение задачи (7) – (10), то при $b > 0$ оно единственно только тогда, когда при всех $k \in \mathbb{N}_0$ выполнены условия (17); при $b = 0$ оно единственно только тогда, когда при всех $k \in \mathbb{N}$ выполнены условия (17) и (16).*

Поскольку α, β и b – любые числа из промежутков задания, то при больших k выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(k)$, которое входит в знаменатели коэффициентов рядов (14) и (15), может стать достаточно малым, то есть возникает проблема "малых знаменателей". В связи с этим, для обоснования существования решения задачи 1.1 надо показать существование чисел α, β и b таких, что при достаточно больших k выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(k)$ отделено от нуля.

Лемма 1.1. *Если выполнено одно из следующих условий: 1) $\alpha = p$ – натуральное; 2) $\alpha = p/q \notin \mathbb{N}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $(p,q) = 1$, $(q,4) = 1$, то существуют положительные постоянные C_0, $k_0 \in \mathbb{N}$, вообще зависящие от α, β, b такие, что при всех $k > k_0$ и любом фиксированном $\beta > 0$ справедлива оценка*

$$|\Delta_{\alpha\beta b}(k)| \geq C_0 e^{2\pi k\beta} > 0. \tag{19}$$

Если для указанных α при некоторых $k = l = k_1, k_2, \ldots, k_p \leq k_0$, где $0 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_p$, k_i, $i = \overline{1,p}$ и p – заданные натуральные числа, выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(l) = 0$, то для разрешимости задачи (7) – (10) достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\varphi_j = \psi_j = g_j = 0, \tag{20}$$

где $j = 2k, \ 2k-1, \quad k = l = k_1, k_2, \ldots, k_p$; φ_j, ψ_j, g_j – коэффиценты разложения в биортогональный ряд по системам (12) и (13) функций $\varphi(x)$,

$\psi(x)$, $g(x)$ соответственно. Тогда решение задачи (7) – (10) определяется в виде

$$u(x,y) = sgnk_1 \cdot T_0(y) + \left(\sum_{k=1}^{k_1-1} + \sum_{k=k_1+1}^{k_2-1} + \ldots + \sum_{k=k_{p-1}+1}^{k_p-1} + \sum_{k=k_p+1}^{+\infty} \right) \times$$

$$\times \left[T_{2k-1}(y) \cos 2\pi kx + T_{2k}(y) x \sin 2\pi kx \right] + \sum_l C_l u_l(x,y), \tag{21}$$

$$f(x) = sgnk_1 \cdot f_0 + \left(\sum_{k=1}^{k_1-1} + \sum_{k=k_1+1}^{k_2-1} + \ldots + \sum_{k=k_{p-1}+1}^{k_p-1} + \sum_{k=k_p+1}^{+\infty} \right) \times$$

$$\times \left[f_{2k-1} \cos 2\pi kx + f_{2k} x \sin 2\pi kx \right] + \sum_l C_l f_l(x), \tag{22}$$

где $u_l(x,y)$ и $f_l(x)$ определяются соответственно по формулам (18), C_l – произвольные постоянные, в сумме $\sum_l$ индекс l принимает значения $k_1, k_2, \ldots, k_p$ и $sgnk_1 = 0$ при $k_1 = 0$, $sgnk_1 = 1$ при $k_1 \geq 1$. В случае, когда $k_{i+1} - 1 < k_i + 1$, $i = \overline{1,p}$, соответствующую сумму $\sum_{k_i+1}^{k_{i+1}-1}$ будем считать равной нулю.

Теорема 1.2. *Пусть* $\varphi(x) \in C^3[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(1)$, $\psi(x) \in C^3[0,1]$, $\psi(0) = \psi(1)$, $\psi'(0) = 0$, $\psi''(0) = \psi''(1)$, $g(x) \in C^2[0,1]$, $g(0) = g(1)$, $g'(0) = 0$ *и выполнены условия (16) и (19) при всех* $k > k_0$. *Тогда если* $\Delta_{\alpha\beta b}(k) \neq 0$ *при всех* $k \leq k_0$, *то существует единственное решение задачи (7) – (10), где функции* $u(x,y)$ *и* $f(x)$ *определяются соответствующими рядами (14) и (15); если* $\Delta_{\alpha\beta b}(k) = 0$ *при некоторых* $k = l = k_1, k_2, \ldots k_p \leq k_0$, *то задача (7) – (10) разрешима тогда, когда выполнены условия (20) и решение определяется рядами (21) и (22).*

Пусть

$$\|u\|_{L_2[0,1]} = \left(\int_0^1 |u(x,y)|^2 dx \right)^{1/2}, \quad \|u(x,y)\|_{C(\overline{D})} = \max_{\overline{D}} |u(x,y)|,$$

$$\|f(x)\|_{W_2^n} = \left(\int_0^1 \left(\sum_{k=0}^n |f^{(k)}(x)|^2 \right) dx \right)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Теорема 1.3. *Пусть выполнены условия теоремы 1.2 и* $\Delta_{\alpha\beta b}(k) \neq 0$ *при всех* $k \leq k_0$. *Тогда для решения (14), (15) задачи (7) – (10) имеют место оценки:*

$$\|u(x,y)\|_{L_2} \leq N_1 \left(\|\varphi\|_{L_2} + \|\psi\|_{L_2} + \|g\|_{L_2} \right),$$

$$\|f(x)\|_{L_2} \le N_2 \left(\|\varphi\|_{W_2^2} + \|\psi\|_{W_2^2} + \|g\|_{W_2^1}\right),$$
$$\|u(x,y)\|_{C(\overline{D})} \le N_3 \left(\|\varphi\|_{W_2^1} + \|\psi\|_{W_2^1} + \|g\|_{W_2^0}\right),$$
$$\|f(x)\|_{C[0,1]} \le N_4 \left(\|\varphi\|_{W_2^3} + \|\psi\|_{W_2^3} + \|g\|_{W_2^2}\right),$$

где постоянные N_i *не зависят от* $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$.

Решение задачи 1.2 построено в виде сумм биортогональных рядов

$$u(x,y) = T_0(y)(1-x) + \sum_{k=1}^{\infty} T_{2k-1}(y)\sin 2\pi kx + \sum_{k=1}^{\infty} T_{2k}(y)(1-x)\cos 2\pi kx,$$

$$f(x) = f_0(1-x) + \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k-1}\sin 2\pi kx + \sum_{k=1}^{\infty} f_{2k}(1-x)\cos 2\pi kx,$$

где теперь коэффициенты $T_k(y)$ и f_k, $k = 0,1,2,\ldots$, определяются в отличие от задачи 1.1 по системе (12). Здесь также установлен критерий единственности, доказаны теоремы существования и устойчивости решения.

Глава 2 посвящена изучению обратных задач для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа с разными правыми частями. Методом спектральных разложений установлены критерии единственности и доказаны теоремы существования и устойчивости решений поставленных обратных задач.

Для уравнения (5) при $f_1(x) \ne f_2(x)$ поставлены и исследованы следующие обратные задачи.

Задача 2.1. *Найти в области* D *функции* $u(x,y)$ *и* $f(x,y)$, *удовлетворяющие условиям:*

$$u \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+), \quad f_i(x) \in C(0,1) \cap L[0,1], \quad i = 1,2; \tag{23}$$

$$Lu = f(x,y), (x,y) \in D_- \cup D_+; \tag{24}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x),\ u(x,-\alpha) = \psi(x),\ 0 \le x \le 1; \tag{25}$$

$$u_y(x,\beta) = \chi(x), \quad u_y(x,-\alpha) = g(x),\ 0 \le x \le 1; \tag{26}$$

$$u(0,y) = u(1,y),\ u_x(0,y) = 0,\ -\alpha \le y \le \beta, \tag{27}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ *и* $g(x)$ *– заданные достаточно гладкие функции.*

Задача 2.2. *Найти в области* D *функции* $u(x,y)$ *и* $f(x,y)$, *удовлетворяющие условиям (23) – (26) и*

$$u_x(0,y) = u_x(1,y),\ u(1,y) = 0,\ -\alpha \le y \le \beta, \tag{28}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\chi(x)$ *и* $g(x)$ *– заданные достаточно гладкие функции.*

В задачах 2.1 и 2.2 условия (26) выступают в качестве условий переопределения по отношению к прямым задачам.

Решение **задачи 2.1** аналогично задаче 1.1 построено в виде сумм биортогональнальных рядов по системам функций (12) и (13):

$$u(x,y) = T_0(y) + \sum_{k=1}^{\infty} T_{2k-1}(y) \cos 2\pi kx + \sum_{k=1}^{\infty} T_{2k}(y) x \sin 2\pi kx, \qquad (29)$$

$$f_i(x) = f_{i,0} + \sum_{k=1}^{\infty} f_{i,2k-1} \cos 2\pi kx + \sum_{k=1}^{\infty} f_{i,2k} x \sin 2\pi kx, \qquad (30)$$

коэффициенты которых определяются единственным образом, если при всех $k \in \mathbb{N}_0$ (в случае $b > 0$) и $k \in \mathbb{N}$ (в случае $b = 0$) выполнены условия

$$\Delta_{\alpha\beta b}(k) = \operatorname{sh} \lambda_k \beta - \sin \lambda_k \alpha + \sin \lambda_k \alpha \operatorname{ch} \lambda_k \beta - \cos \lambda_k \alpha \operatorname{sh} \lambda_k \beta \neq 0. \qquad (31)$$

Если при некоторых α, β, b и $k = p \in \mathbb{N}(\mathbb{N}_0)$ нарушены условия (31), то однородная обратная задача (23) – (27) (где $\varphi(x) \equiv 0$, $\psi(x) \equiv 0$, $g(x) \equiv 0$, $\chi(x) \equiv 0$) имеет ненулевое решение

$$u_p(x,y) = u_p(y) \cos 2\pi px, \qquad (32)$$

$$u_p(y) = \begin{cases} f_p \frac{(1-\cos\lambda_p\alpha)(\operatorname{ch}\lambda_p(y-\beta)-1)}{\lambda_p^2[\cos\lambda_p\alpha(\operatorname{ch}\lambda_p\beta-1)+\sin\lambda_p\alpha\operatorname{sh}\lambda_p\beta]}, & y > 0, \\ -\frac{f_p}{\lambda_p^2} + f_p \frac{(\operatorname{ch}\lambda_p\beta-1)\cos\lambda_p y+\operatorname{sh}\lambda_p\beta\sin\lambda_p(y+\alpha)-\operatorname{sh}\lambda_p\beta\sin\lambda_p y}{\lambda_p^2[\cos\lambda_p\alpha(\operatorname{ch}\lambda_p\beta-1)+\sin\lambda_p\alpha\operatorname{sh}\lambda_p\beta]}, & y < 0, \end{cases}$$

$$f_{1p}(x) = \frac{f_p(1-\cos\lambda_p\alpha)\cos 2\pi px}{\cos\lambda_p\alpha(\operatorname{ch}\lambda_p\beta - 1) + \sin\lambda_p\alpha\operatorname{sh}\lambda_p\beta}, \quad f_{2p}(x) = f_p \cos 2\pi px, \qquad (33)$$

где f_p – произвольная отличная от нуля постоянная.

При фиксированных $k = p \in \mathbb{N}_0$, $b > 0$ ($p \in \mathbb{N}$, $b = 0$) и $\beta > 0$ выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(p) = 0$ только в том случае, когда

$$\alpha = \frac{2\pi m}{\lambda_p}, \quad \alpha = \frac{2\pi n}{\lambda_p} - \frac{2}{\lambda_p} \arcsin\left(\frac{\operatorname{sh}\frac{\lambda_p\beta}{2}}{\sqrt{\operatorname{ch}\lambda_p\beta}}\right), \quad m, n \in \mathbb{N}. \qquad (34)$$

Теорема 2.1. *Если существует решение задачи (23) – (27), то оно единственно только тогда, когда при всех $k \in \mathbb{N}_0$ (при всех $k \in \mathbb{N}$ в случае, когда $b = 0$) выполнены условия (31).*

Выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(k)$ входит в знаменатели коэффициентов рядов (29) и (30), определяющих решение задачи. В связи с этим необходимо ответить на вопрос при каких α, β, b выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(k)$ отделено от нуля.

Отметим, что при $b = 0$ и когда α принимает рациональные значения $\Delta_{\alpha\beta 0}(k) = 0$. Следовательно, для таких α нарушается единственность решения задачи 2.1.

Лемма 2.1. *Если $\alpha > 0$ является любым алгебраическим числом степени $n \geq 2$ и $b = 0$, то существуют положительные постоянные β_0 и C_0, вообще говоря, зависящие от α, такие, что при всех $\beta > \beta_0$ и $k \in \mathbb{N}$ справедливы оценки*

$$|\Delta_{\alpha\beta 0}(k)| \geq e^{2\pi k\beta}\frac{C_0}{k^{2+\varepsilon}}, \tag{35}$$

где ε – заданное достаточно малое число, причем $\varepsilon > 0$ при $n > 2$ и $\varepsilon = 0$ при $n = 2$.

Отметим, что каждое иррациональное число α единственным образом разлагается в бесконечную цепную дробь $\alpha = [a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...]$, при этом целые числа $a_0, a_1, a_2, ...$ называются элементами числа α. Элементы всякой квадратической иррациональности ограничены.

Лемма 2.2. *Пусть α – положительное иррациональное число с неограниченными элементами и $b = 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует бесконечное множество целых чисел $k > 0$ таких, что*

$$|\Delta_{\alpha\beta 0}(k)| < e^{2\pi k\beta}\frac{\varepsilon C_1}{k}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{36}$$

где C_1 – положительное число.

Из доказанной оценки (36) следует, что для таких $\alpha > 0$, выражение $\Delta_{\alpha\beta 0}(k)$, которое является знаменателем коэффициентов ряда, определяющего решение задачи, может быть сделанным сколь угодно малым. Поэтому в этом случае решение задачи 2.1 в виде суммы рядов (29) – (30) не существует.

Лемма 2.3. *Если b – положительное действительное число и выполнено одно из условий: 1) $\alpha = p$ – натуральное; 2) $\alpha = p/q \notin \mathbb{N}$, $p, q \in \mathbb{N}$, $(p, q) = 1$, то существуют положительные постоянные $k_0 \in \mathbb{N}$ и C_0, вообще говоря, зависящие от α, β и b, такие, что при всех $k > k_0$ справедлива оценка*

$$|\Delta_{\alpha\beta b}(k)| \geq e^{\lambda_k\beta}\frac{C_0}{k}. \tag{37}$$

Лемма 2.4. *Если α является любым алгебраическим числом степени $n = 2$ и b – положительное действительное число, то существуют положительные постоянные $k_0 \in \mathbb{N}$, b_0 и C_0, вообще говоря, зависящие от α, β и b, такие, что при всех $k > k_0$ и $b < b_0$ справедлива оценка*

$$|\Delta_{\alpha\beta b}(k)| \geq e^{\lambda_k\beta}\frac{C_0}{k^2}. \tag{38}$$

Если для α и b, удовлетворяющих условиям лемм 2.3, 2.4, при некоторых $k = l = k_1, k_2, \ldots, k_p \leq k_0$, где $0 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_p$, k_i, $i = \overline{1,p}$ и p – заданные натуральные числа, выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(l) = 0$, то для разрешимости задачи (23) – (27) достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\psi_j = \varphi_j = g_j = \chi_j = 0, \tag{39}$$

где $j = 2k,\ 2k-1,\ k = l = k_1, k_2, \ldots, k_p$; φ_j, ψ_j, g_j, χ_j – коэффициенты разложения в биортогональный ряд функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$, $\chi(x)$ соответственно. Решение выписывается в виде сумм соответствующих рядов, аналогичных (21), (22).

Для примера приведем теорему существования решения задачи (23) – (27) при выполнении оценки (37).

Теорема 2.2. *Пусть* $\varphi(x), \psi(x) \in C^5[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1)$, $\varphi'(0) = 0$, $\varphi''(0) = \varphi''(1)$, $\varphi'''(0) = 0$, $\varphi^{IV}(0) = \varphi^{IV}(1)$, $\psi(0) = \psi(1)$, $\psi'(0) = 0$, $\psi''(0) = \psi''(1)$, $\psi'''(0) = 0$, $\psi^{IV}(0) = \psi^{IV}(1)$, $\chi(x), g(x) \in C^4[0,1]$, $\chi(0) = \chi(1)$, $\chi'(0) = 0$, $\chi''(0) = \chi''(1)$, $\chi'''(0) = 0$, $g(0) = g(1)$, $g'(0) = 0$, $g''(0) = g''(1)$, $g'''(0) = 0$ *и выполнена оценка (37) при* $k > k_0$. *Тогда если* $\Delta_{\alpha\beta b}(k) \neq 0$ *при всех* $k \leq k_0$, *то существует единственное решение задачи (23) – (27), которое определяется рядами (29) и (30); если* $\Delta_{\alpha\beta b}(k) = 0$ *при некоторых* $k = k_1, k_2, \ldots k_p \leq k_0$, *то задача (23) – (27) разрешима тогда, когда выполнены условия (39).*

Аналогичные теоремы существования доказаны и при выполнении оценок (35), (38).

Таким образом, в случае $b = 0$ следует, что если

1) α – рациональное, то нарушается единственность решения;

2) α – число с неограниченными элементами, то решение задачи 2.1 в виде сумм рядов не существует;

3) α – любое алгебраическое число степени $n \geq 2$, $\beta > \beta_0$, то существует единственное решение задачи (23) – (27), которое определяется рядами (29) и (30).

В случае $b > 0$ следует, что если

1) $\alpha = \frac{2\pi m}{\lambda_k}$ или $\alpha = \frac{2\pi n}{\lambda_k} - \frac{2\varphi_k}{\lambda_k}$, $\quad m, n, k \in \mathbb{N}$, то нарушается единственность решения;

2) α – натуральное, рациональное или любое алгебраическое число степени $n = 2$ (в последнем случае необходимо, чтобы $b < b_0$), то существует положительная постоянная k_0, вообще говоря, зависящая от α, β и b, такая, что если при всех $k \leq k_0$ выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(k) \neq 0$, то существует единственное решение задачи (23) – (27), которое определяется рядами (29) и (30), если же при некоторых $k = l = k_1, k_2, \ldots, k_p \leq k_0$, где

$1 \le k_1 < k_2 < \ldots < k_p$, k_i, $i = \overline{1,p}$ и p – заданные натуральные числа, выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(l) = 0$ и выполнены достаточные условия разрешимости задачи 2.1, то решение этой задачи определяется не единственным образом.

Теорема 2.3. *Пусть выполнены условия теоремы 2.2 и выражение $\Delta_{\alpha\beta b}(k) \ne 0$ при всех $k \le k_0$. Тогда для решения (29) и (30) задачи (23) – (27) имеют место оценки:*

$$\|u(x,y)\|_{L_2} \le K_1 \left(\|\varphi\|_{W_2^2} + \|\psi\|_{W_2^2} + \|g\|_{W_2^1} + \|\chi\|_{W_2^1}\right),$$

$$\|f_i(x)\|_{L_2} \le K_2 \left(\|\varphi\|_{W_2^4} + \|\psi\|_{W_2^4} + \|g\|_{W_2^3} + \|\chi\|_{W_2^3}\right), \quad i = 1,2,$$

$$\|u(x,y)\|_{C(\overline{D})} \le K_3 \left(\|\varphi\|_{W_2^3} + \|\psi\|_{W_2^3} + \|g\|_{W_2^2} + \|\chi\|_{W_2^2}\right),$$

$$\|f_i(x)\|_{C[0,1]} \le K_4 \left(\|\varphi\|_{W_2^5} + \|\psi\|_{W_2^5} + \|g\|_{W_2^4} + \|\chi\|_{W_2^4}\right), \quad i = 1,2,$$

где постоянные K_i не зависят от $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x)$, $\chi(x)$.

Аналогично доказывается устойчивость задачи (23) – (27) при выполнении оценок (35), (38).

Для задачи 2.2 получены аналогичные результаты, а именно, установлен критерий единственности, решение построено в виде сумм биортогональнальных рядов, обоснована сходимость рядов в классах функций (23) и доказана устойчивость решения.

Публикации по теме диссертации

Статьи в ведущих рецензируемых научных журналах, включенных в список ВАК

1. Мартемьянова, Н.В.: *Обратная задача для уравнения смешанного типа с нелокальным граничным условием* [Текст] / Н.В. Мартемьянова // Вестник СамГУ — Естественнонаучная серия. – **80**(6). – С. 27–38 (2010) – 0,69 п.л.

2. Сабитов, К.Б.: *Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа* [Текст] / К.Б. Сабитов, Н.В. Мартемьянова // Известия Вузов. Математика. – №2. – С. 71–85 (2011) – 0,87 п.л.

Публикации в других изданиях

3. Мартемьянова, Н.В.: *Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа* [Текст] / Н.В. Мартемьянова // Материалы международной конференции, посвященной 70-летию ректора МГУ академика В.А. Садовничего "Современные проблемы математики, механики и их приложений". – М.: "Университетская книга". – С. 175–176 (2009) – 0,06 п.л.

4. Мартемьянова, Н.В.: *Критерий единственности решения обратной задачи для уравнения Лаврентьева-Бицадзе* [Текст] /

Н.В. Мартемьянова // Труды Стерлитамакского филиала Академии наук Республики Башкортостан. Серия "Физико-математические и технические науки". – Уфа: Гилем. – 6. – С. 55–61 (2009) – 0,44 п.л.

5. Мартемьянова, Н.В.: *Критерий единственности решения нелокальной обратной задачи для уравнения смешанного типа* [Текст] / Н.В. Мартемьянова // Тезисы докладов Международной школы-конференции "Фундаментальная математика и её приложения в естествознании", посвященной 100-летию БашГУ. – Уфа: РИЦ БашГУ. – С. 20 (2009) – 0,06 п.л.

6. Мартемьянова, Н.В.: *Об одной нелокальной обратной задаче для уравнения смешанного типа* [Текст] / Н.В. Мартемьянова // Сборник трудов Международной школы-конференции "Фундаментальная математика и её приложения в естествознании", посвященной 100-летию БашГУ. Математика. – Уфа: РИЦ БашГУ. – **1**. – С. 239–247 (2009) – 0,5п.л.

7. Мартемьянова, Н.В.: *Необходимое и достаточное условие единственности решения нелокальной обратной задачи для уравнения смешанного типа* [Текст] / Н.В. Мартемьянова // Материалы Второй всероссийской научно-практической конференции "Интегративный характер современного математического образования", посвященной памяти доктора физико-математических наук, профессора В.Ф. Волкодавова. – Самара: ПГСГА – С. 38–44 (2009) – 0,41 п.л.

8. Мартемьянова, Н.В.: *Существование и единственность решения нелокальной обратной задачи для уравнения смешанного типа* [Текст] / Н.В. Мартемьянова // Труды седьмой Всероссийской научной конференции с международным участием "Математическое моделирование и краевые задачи". Ч.3: Дифференциальные уравнения и краевые задачи. – Самара: СамГТУ. – С. 173–176 (2010) – 0,19 п.л.

9. Мартемьянова, Н.В.: *Об устойчивости решения нелокальной обратной задачи для уравнения Лаврентьева-Бицадзе* [Текст] / Н.В. Мартемьянова // Материалы Седьмой школы молодых учёных "Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики". – Нальчик. – С. 63–66 (2010) – 0,19 п.л.

10. Мартемьянова, Н.В.: *Обратная задача для вырождающегося уравнения смешанного типа* [Текст] / Н.В. Мартемьянова // Материалы второй Международной конференции "Математическая физика и ее приложения". – Самара: ООО "Книга". – С. 215–216 (2010) – 0,09 п.л.

11. Мартемьянова, Н.В.: *Устойчивость решения обратной задачи для уравнения Лаврентьева-Бицадзе с нелокальным граничным условием* [Текст] / Н.В. Мартемьянова // Труды Математического центра им. Н.И.

Лобачевского. – Казань: Казан. матем. об-во. – **40**. – С. 220–224 (2010) – 0,25 п.л.

12. Мартемьянова, Н.В.: *Обратная нелокальная задача для уравнения с оператором Лаврентьева-Бицадзе в прямоугольной области* [Текст] / Н.В. Мартемьянова // Тезисы докладов Международной конференции "Дифференциальные уравнения и смежные вопросы", посвященной 110-ой годовщине со дня рождения выдающегося математика И.Г. Петровского. – М.: Изд-во МГУ. – С. 266 (2011) – 0,06 п.л.

13. Мартемьянова, Н.В.: *Нелокальная обратная задача для уравнения с оператором Лаврентьева-Бицадзе в прямоугольной области* [Текст] / Н.В. Мартемьянова // Труды Всероссийской научной конференции с международным участием "Дифференциальные уравнения и их приложения". – Уфа: Гилем. – С. 153–158 (2011) – 0,31 п.л.

14. Мартемьянова, Н.В.: *Нелокальная обратная задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе* [Текст] / Н.В. Мартемьянова // Тезисы докладов Всероссийской конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения". – Самара: "Универс групп". – С. 76 (2011) – 0,06 п.л.

15. Мартемьянова, Н.В.: *Обратная нелокальная задача для уравнения Лаврентьева-Бицадзе* [Текст] / Н.В. Мартемьянова // Сборник материалов Международной конференции "Комплексный анализ и его приложения в дифференциальных уравнениях и теории чисел". – Белгород: ИПК НИУ "БелГУ". – С. 78–79 (2011) – 0,06 п.л.

16. Мартемьянова, Н.В.: *О единственности решения обратной задачи для уравнения с оператором Лаврентьева-Бицадзе* [Текст] / Н.В. Мартемьянова // Труды Математического центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: Казан. матем. об-во. – **44**. – С. 209–211 (2011) – 0,19 п.л.